第十二讲 三角不等式

本讲概述

三角不等式除了与三角关系式（如各种三角变形、三角恒等式）有关，还时常结合基本的不等式方法。再次回顾最基本的：

平均值不等式：对任意非负实数 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$$

柯西不等式：对任意实数 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 有

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\ge(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2$$

例题精讲

【例1】 设 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$，则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta$ 的最大、最小值分别为_________

【例2】 如果 $\cos^5\theta-\sin^5\theta<7(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$，那么 θ 的取值范围是_________

【例3】 设 $x,y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\tan x=3\tan y$，证明：$x-y\le\frac{\pi}{6}$

【例4】 设 n 为正整数，证明：$\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{3}\ldots\cos\frac{1}{n}>\frac{\sqrt{2}}{2}$

【例5】 已知α,β为锐角，求证：$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geq 9$

【例6】 证明嵌入不等式：$x^2+y^2+z^2\geq 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$，其中 $A+B+C=(2k+1)\pi$，k为整数。

【例7】 在三角形 ABC 中，证明：

(1) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\sin^2\frac{A+B}{4}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$

(2) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{3}{2}$

【例8】 在三角形 ABC 中，证明：

（1）$\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$（提示：可利用恒等式 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$）

（2）直接利用恒等式$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$ 证明

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}$$

【例9】 (加强的外森比克不等式) 设 a,b,c 为三角形 ABC 的三边长，S 为面积，证明：$ab+bc+ca\ge 4\sqrt{3}S$

【例10】设正数 a、b、c、x、y、z 满足 $cy+bz=a$，$az+cx=b$，$bx+ay=c$.

(1) 证明：以 a,b,c 为边可以构成锐角三角形，这个锐角三角形的三个角的余弦值分别为 x,y,z

(2) 求函数 $f(x, y, z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$ 的最小值。

大显身手

1. 求证：对所有实数x,y，均有$\cos x^2+\cos y^2-\cos xy<3$

2. 在锐角三角形ABC中，求证：$\tan A\tan B\tan C>1$

3. 设 $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=0$，证明：$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leq\frac{n}{3}$

4. 设 n 为正整数，$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$ 为非负实数，$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=\pi$，记 M_n 为 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_n$ 的最大值。

（1）求 M_2,M_3；

（2）证明：$M_3=M_4=M_5=\cdots$

学习之外